Attività 1

Per la lezione:
1 Introduzione al calcolo letterale

Dal particolare al generale

"Leggi nel pensiero"

Invita un tuo amico a pensare a un numero naturale senza dirti qual è e a eseguire certe operazioni comunicandoti il risultato finale. Potrai stupirlo riuscendo a scoprire il numero segreto che aveva pensato. Le operazioni da eseguire sono le seguenti:

1. Pensa un numero naturale qualsiasi
2. Somma 6 al numero pensato
3. Moltiplica il risultato per 3
4. Sottrai 9
5. Dividi il risultato per 3
6. Somma al tutto il numero 4

Dimmi qual è il risultato e io ti dirò quale numero hai pensato.

Al risultato che ti dirà il tuo amico tu sottrai mentalmente 7: il numero che troverai sarà il numero segreto. Prova a eseguire le operazioni indicate, inserendo nel l'espressione seguente un numero naturale qualsiasi ed eseguendo i calcoli.
$((\ldots + 6) \cdot 3 - 9) : 3 + 4 - 7 = \ldots$
Ripeti questo giochetto un paio di volte: funziona? Ma perché funziona?

Generalizza il problema

Per indagare se e come il gioco funzioni per qualunque numero naturale, generalizza la sequenza di calcolo, indicando con n il numero segreto:
$((n + \ldots\ldots) \cdot \ldots\ldots - \ldots\ldots) : \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots$
Sviluppa i calcoli applicando le proprietà delle operazioni.
$(3 \cdot n + \ldots\ldots - \ldots\ldots) : \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots =$ per la proprietà ....
....
$= (3 \cdot n + \ldots\ldots) : \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots =$ per la proprietà ....
$= n + \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots =$ per la proprietà ....
$= \ldots\ldots$ per la proprietà ....
Come vedi, dietro a questa presunta *lettura del pensiero* non c'è nulla di magico: è bastata un po' di algebra.

Rifletti

Rifletti ora su come hai cercato di capire il problema: inizialmente hai lavorato su un'espressione numerica particolare. In un secondo momento, per capire se il trucco valesse per qualunque numero naturale hai costruito un'espressione algebrica con una variabile di nome n e l'hai trasformata con le proprietà delle operazioni. Avrai a che fare, d'ora in avanti, con molte **espressioni letterali** di questo tipo, più o meno complicate. Ricorda che un'espressione letterale indica uno **schema di calcolo** sulle lettere, o variabili che contiene. Per passare dal caso generale a un caso particolare si sostituiscono alle variabili della formula dei precisi valori numerici: si ottiene così un'espressione numerica che, calcolata, dà come risultato un numero.

Attività 2

Per la lezione:
5 Operazioni con i polinomi

Interrogare una formula

Esplora il problema

Un oggetto che costa 100 euro subisce prima un aumento di prezzo del 10%; dopo un certo periodo il nuovo prezzo viene ribassato del 10%. Qual è il suo costo al termine delle due operazioni? Ritorna al valore originario?
A prima vista sembrerebbe così: aumento e diminuzione sono operazioni inverse e avvengono nella stessa percentuale. Tuttavia è opportuno fare qualche prova per valutare se sia vero o falso ciò che l'intuito suggerisce.

Come sai, una percentuale si può esprimere anche con un numero decimale: 10% = ... L'aumento e la successiva diminuzione di prezzo sono quindi calcolabili con l'espressione [100 · (1 + ...)] · (1 – ....).
Svolgi le operazioni nell'ordine, così come si susseguono. La parentesi quadra dà come risultato ....
Questa cifra va successivamente moltiplicata per .... per applicare la riduzione. Quale cifra si ottiene al termine delle due operazioni? ....
Se non è la cifra originaria, si tratta di un valore inferiore o superiore? ....
Prova a spiegare perché, nonostante le percentuali di aumento e diminuzione siano le stesse, si ottenga un risultato finale diverso da quello di partenza.

....

Quale sarebbe stata la cifra finale se ai 100 euro si fosse applicata prima una riduzione del 10% e successivamente un aumento del 10%? ....

Interpreta algebricamente

Si tratta ora di vedere se questo risultato è legato al tipo di percentuale che è stata applicata, o se è sempre valido. Generalizziamo il problema, con una percentuale che corrisponde a un numero decimale p positivo e minore di 1. La procedura di calcolo diventa [100 · (1 + ...)] · (1 – ......).
Questa formula non può essere certamente *calcolata numericamente* come hai fatto in precedenza, però può essere trasformata usando le proprietà delle operazioni.

a. Togliamo la parentesi quadra che racchiude il primo prodotto:

$$100 \cdot (1 + p) \cdot (1 - p)$$

b. Consideriamo la prima parentesi tonda $(1 + p)$ come un unico oggetto, che chiamiamo $\boldsymbol{R}$. Sostituiamo nell'espressione e otteniamo .... · $\boldsymbol{R}$ · (...... – ......).

c. Scriviamo l'espressione come
$100 \cdot (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R} \cdot p)$ per la proprietà ....
Inserendo nuovamente nell'espressione $(1 + p)$ al posto di $\boldsymbol{R}$ otteniamo

$$100 \cdot [(1 + p) - (1 + p) \cdot p] = 100 \cdot (1 + p - p - p^2) =$$

per le proprietà ....

$= 100 \cdot (1 - p^2)$ perché la somma di due numeri .... è uguale a ....

L'espressione letterale $100 \cdot [(1 + p) \cdot (1 - p)]$ è equivalente a $100 \cdot (1 - p^2)$.

Cosa dice questa seconda espressione? La parentesi tonda rappresenta *un numero minore di 1*.
Rifletti: 100 moltiplicato per un numero minore di 1 dà un risultato maggiore o minore di 100? ....
La formula che abbiamo ricavato ci dice che:

1. Qualunque sia il valore percentuale p, (con p numero positivo minore di 1) applicato a una certa cifra iniziale, un aumento seguito da una diminuzione nella stessa percentuale p restituisce un risultato .... valore originario.
2. Inoltre, per la proprietà commutativa della moltiplicazione,
$100 \cdot [(1 + p) \cdot (1 - p)] = 100 \cdot [(1 - p) \cdot (1 + p)] =$ ....
In altri termini, ha importanza se sia applicato prima l'aumento e poi la diminuzione o viceversa? ....

Rifletti

Nella formula $100 \cdot [(1 + p) \cdot (1 - p)]$ l'ordine con cui sono indicati i calcoli riflette cronologicamente la modifica del prezzo. Da questa formula abbiamo ottenuto $100 \cdot (1 - p^2)$, uno schema di calcolo nuovo, diverso dal precedente, che garantisce lo stesso risultato. Con questa nuova espressione si sono perse alcune informazioni ma se ne sono acquistate altre, che riguardano il risultato finale in rapporto al valore iniziale.