Unità S3

La probabilità

Attività 1 Nascere nello stesso giorno

STEM

Per le lezioni:
2 Misure di probabilità
3 Probabilità di eventi composti

Pensi che sia più probabile ottenere "testa" lanciando una moneta equilibrata o che nella tua classe ci siano almeno due persone che hanno la stessa data di compleanno? Prova a rispondere senza rifletterci troppo, affidandoti all'intuito.

Inquadra il problema

Descriviamo il problema definendo gli eventi che ci interessano:
M = «esce testa nel lancio di una moneta»
E = «almeno due alunni hanno la stessa data di compleanno»
Chiariamo il significato delle parole "**almeno due**" nel nostro problema.
Indica con N la numerosità della classe, con E_k l'evento «esattamente k alunni hanno la stessa data di compleanno». Quali valori può assumere il numero k? ....
Esprimi l'evento E dal punto di vista insiemistico, rispetto agli eventi E_k.

....

Chiariamo ora il significato delle parole "**è più probabile**".
Per valutare numericamente le probabilità dei due eventi, utilizziamo la cosiddetta **definizione classica**, secondo cui, la probabilità è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, relativi al verificarsi dell'evento E: $p(E)=\frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}}$.
In base a questa definizione, quanto vale la probabilità di ottenere "testa", lanciando una moneta equilibrata? $p(M)=\frac{\dots}{\dots}=$ ......%.
Nel caso dell'evento E, è più semplice calcolare la sua probabilità passando attraverso il calcolo della probabilità del suo evento contrario $\overline{E}$: studieremo infatti che vale la relazione $p(E)=1-p(\overline{E})$. Esprimi a parole l'evento $\overline{E}$.
$\overline{E}$ = «..»
Ci serviamo ora del calcolo combinatorio per valutare il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento $\overline{E}$.

Raccogli i dati ed esegui i calcoli con la calcolatrice

Supponiamo di avere una classe con 25 alunni, quindi $N=25$. Puoi cambiare questo valore e i calcoli che ne seguiranno, utilizzando la numerosità della tua classe.
Possiamo indicare le date dei 25 compleanni con una sequenza di caratteri numerici: per esempio, per un alunno nato il 23 marzo, scriviamo 2303.
Supponendo che un anno sia composto da 365 giorni, in un gruppo di 25 alunni, ciascuno può compiere gli anni in uno qualsiasi dei 365 giorni, quindi il numero di sequenze possibili è dato dal numero di disposizioni con ripetizione di 365 elementi presi 25 alla volta: $D^*_{365,25}=\underbrace{365\cdot 365\cdot\ldots\cdot 365}_{25\text{ volte}}=$ .... Il numero di casi possibili è quindi:..........
Per calcolare il numero di casi favorevoli all'evento $\overline{E}$, osserviamo che il primo alunno scelto ha 365 possibilità, il secondo 364 e così via, fino a esaurire tutti gli alunni. Si tratta quindi del numero di .... di ...... elementi presi ..... alla volta.
Il numero di sequenze relative all'evento $\overline{E}$ è: $D_{365,25}=365\cdot 364\cdot\ldots\cdot\ \dots\ =\frac{\dots!}{\dots!}$.

DEAFLIX

Probabilità e calcolo combinatorio

- video di teoria
- video di esercizi svolti
- esercizi autocorrettivi

Esplora con GeoGebra

Attività con GeoGebra

Esercizi interattivi

Attività con la calcolatrice grafica

Calcola la probabilità dell'evento $\overline{E}$: $p(\overline{E}) = \dfrac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}} = \dfrac{\dfrac{\dots\dots!}{\dots\dots!}}{\dots\dots}$.

Calcola la probabilità dell'evento E ed esprimi il risultato in forma decimale, arrotondandolo a due cifre decimali: $p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \dfrac{\dfrac{\dots\dots!}{\dots\dots!}}{\dots\dots} = 0,\dots\dots = \dots\dots\%$.

Confronta il risultato ottenuto con la probabilità di ottenere "testa" e analizza la risposta intuitiva che hai dato all'inizio. L'avresti mai pensato?

Generalizza il problema, costruisci una funzione e analizzala

Considera ora il caso generale di una classe, o un gruppo di persone, di numerosità x. Ripeti il calcolo precedente e scrivi la formula finale di $p(E)$ in funzione di x, che indichiamo con $p(x)$: $p(x) = 1 - \dfrac{D_{365,\dots}}{365^{\dots}} = 1 - \dfrac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$.

Il Foglio di calcolo di GeoGebra non è in grado di valutare numeri troppo grandi, quali, per esempio, 365!. Per analizzare la funzione $p(x)$ e disegnarne il grafico, occorre usare particolari accorgimenti.

1. Imposta il menu *Opzioni* in modo che vengano visualizzate almeno 10 cifre decimali e che nessun elemento venga etichettato.
2. Apri il Foglio di calcolo e intesta la prima riga come indicato in Fig. 1, scrivendo il testo "x" fra virgolette, per evitare che il software lo interpreti come variabile.
3. Inserisci nella colonna A i numeri naturali da 2 a 100.
4. Nella cella B2, inserisci la formula per il calcolo del numero di disposizioni $D_{365,x}$, mediante il comando: *nPr(365,A2)*. Copia e incolla la formula nelle celle sottostanti.
5. Nella cella C2, inserisci la formula opportuna per calcolare il valore della funzione $p(x)$ e copiala nelle celle sottostanti: ....
   In tal modo hai creato una tabella di valori come quella rappresentata in Fig. 2.
6. Imposta la visualizzazione degli assi cartesiani in modo che il rapporto di scala tra asse x e asse y sia 5:1.
7. Seleziona tutte le celle non vuote delle colonne A e B del Foglio di calcolo e crea una lista di punti, che viene visualizzata nella vista *Grafici* (Fig. 3).

Attività con GeoGebra
La probabilità dell'evento, al variare del numero di persone

A	*B*	*C*
x	disposizioni	$p(x)$

FIGURA 1

	A	B	C
1	x	disposizioni	p(x)
2	2	132860	0.002739726
3	3	48228180	0.0082041659
4	4	17458601160	0.0163559125
5	5	6302555018760	0.0271355737
6	6	2268919806753600	0.0404624836
7	7	814542210624542464	0.0562357031

FIGURA 2

Hai così costruito il grafico della funzione $p(x)$, con $2 \le x \le 100$. Ragionando su di esso e sui dati che hai nella tabella, rispondi alle seguenti domande.

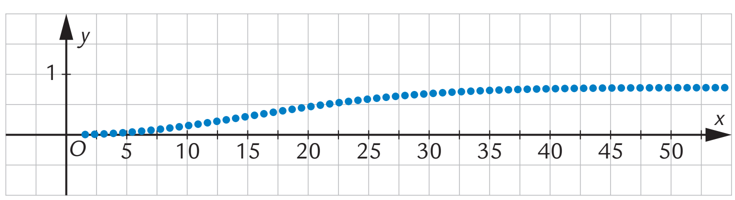

FIGURA 3

- Qual è il minimo valore di x per cui la probabilità di avere almeno due persone che festeggiano il compleanno nella stessa data è maggiore della probabilità di ottenere "testa"? .... E per avere una probabilità maggiore del 90%? ....
- Perché, all'aumentare della numerosità del gruppo scelto, la probabilità si avvicina sempre di più a 1? In corrispondenza di quali valori di x essa vale sicuramente 1?

....

....

Il fenomeno che abbiamo analizzato si chiama **paradosso del compleanno** ed è stato formalizzato nel 1939 da Richard von Mises.