

SECONDA PARTE

ESEMPI

CAPITOLO 9

L'AVVIO ALLA COSTRUZIONE DEL RAGIONAMENTO PROPORZIONALE

1. INTRODUZIONE

In questo capitolo si descrive la prima parte di una esperienza didattica progettata e sviluppata con alunni di scuola media con l'obiettivo di favorire in loro la costruzione del ragionamento proporzionale: l'attività può essere considerata una buona interpretazione, nella pratica scolastica, delle idee costruttiviste esposte nei capitoli precedenti.

L'intera esperienza è stata descritta nel testo "Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe (A. Pesci, Pitagora, Bologna, 2002). Qui si è scelto di riportare in dettaglio la fase iniziale dell'attività, sia per documentare le reazioni sollecitate negli studenti dalle situazioni problematiche proposte sia per apprezzare le loro argomentazioni nell'interazione, per validare o confutare le idee proposte dai compagni.

Prima di entrare nel dettaglio della descrizione dell'esperienza è importante premettere alcune riflessioni sul modo in cui il ragionamento proporzionale viene di solito insegnato, a partire dalla scuola elementare.

Nella scuola elementare, gli alunni imparano a conoscere il rapporto con i significati cosiddetti di "ripartizione" e "continenza". Questo quadro viene generalmente ampliato nella scuola media, dove, nell'ambito della tematica della proporzionalità, l'idea di rapporto fra grandezze (omogenee e non) viene applicata a molteplici situazioni in matematica, fisica o altro.

Il fatto è che i libri di testo affrontano la proporzionalità in un modo che si può definire dogmatico

perché la teoria è presentata nella maggior parte dei casi senza alcuna argomentazione e giustificazione.

Di solito poi i testi fanno seguire una grande molteplicità di esercizi che gli studenti imparano a svolgere spesso solo in modo meccanico: la stessa collocazione degli esercizi, nella parte di testo dedicata a rapporti e proporzionalità, non fa certo sorgere nei ragazzi il dubbio del ricorso a rapporti piuttosto che ad altre strategie risolutive.

Il concetto di rapporto, e in generale di proporzionalità, riveste un ruolo particolarmente importante in matematica, perché ne costituisce senza dubbio un concetto centrale, che trova molteplici applicazioni anche a livello di scuola superiore e di università.

È solo nel corso della scuola media, però, che gli studenti hanno l'occasione di studiare il rapporto e la proporzionalità fra grandezze come argomento a sé stante, e di affrontare, tra i vari tipi di problemi, anche situazioni che richiedono un ragionamento proporzionale: è quindi il caso di dedicarvi tempo e di curarne la concettualizzazione.

Nella scuola media superiore, anche quando l'argomento della proporzionalità fra grandezze viene ripreso, non si mette certo in dubbio che i ragazzi non conoscano la problematica e si dà per scontato che gli studenti sappiano individuare senza incertezze le situazioni che necessitano del ricorso a tale concetto.

È proprio nel corso della scuola media, quindi, che si può collocare un intervento didattico su questo argomento, mirato ad indagare e a mettere in dubbio, prima ancora che a presentare, uno schema di ragionamento che ricorra alla costanza di rapporti.

La proposta didattica che abbiamo elaborato per la seconda media si propone dunque l'ampliamento del concetto di rapporto e la costruzione del ragionamento proporzionale, una costruzione ragionata, discussa e condivisa da tutta la classe, attraverso la presentazione di opportune situazioni problematiche.

Ci siamo proposti di costruire un itinerario didattico in cui il ricorso alla costanza di rapporti nascesse come strategia necessaria per affrontare le situazioni problematiche proposte e soprattutto si scontrasse con altre strategie risolutive, abbastanza spontanee ma di fatto non adeguate alle situazioni stesse. Momenti fondamentali di questo itinerario sono state proprio le discussioni della classe sulle varie strategie risolutive emerse, durante le quali l'insegnante non si è pronunciata sulla correttezza delle argomentazioni, lasciando così spazio alle varie espressioni di assenso o dissenso.

In precedenza un test esplorativo composto da 15 problemi era stato proposto durante il secondo quadrimestre a 162 alunni appartenenti a nove classi di terza media di Pavia e provincia, allo scopo di valutare con quanta consapevolezza

venisse usato il rapporto a conclusione del ciclo della scuola dell'obbligo.

È nella soluzione del seguente problema che gli studenti avevano commesso la maggiore percentuale di errore, forse anche per il contesto problematico poco usuale :

" Mario partecipa a un torneo di ping-pong di 18 partite, vincendone 12. Antonio, partecipando a un altro torneo di 24 partite, ne vince 16. Chi ha avuto il miglior risultato? "

Senza entrare nel dettaglio degli esiti ottenuti, è interessante osservare, per quello che si dirà poi, che dei 45 studenti (28%) che hanno sbagliato e non hanno usato un rapporto, 38 (23%) sono ricorsi al calcolo di differenze. Inoltre 10 alunni (6%) non hanno tentato neanche di risolvere l'esercizio. In conclusione, il problema aveva costituito una notevole difficoltà per il 34% degli studenti di fine terza media.

L'itinerario didattico elaborato per lo sviluppo del ragionamento proporzionale è fondato su tre ipotesi centrali.

La prima ipotesi è che l'apprendimento significativo del ragionamento proporzionale da parte degli alunni non possa avvenire con una sua semplice descrizione da parte dell'insegnante, in accordo con uno dei principi fondamentali del costruttivismo.

Come ogni altro concetto matematico, dunque, anche la proporzionalità deve essere costruita attivamente dagli alunni. Occorre quindi che la necessità di un tale tipo di ragionamento sia fatta nascere in situazioni problematiche opportune, nelle quali cioè gli alunni stessi, attraverso adeguate discussioni e approfonditi confronti tra le varie strategie possibili, riconoscano il modello concettuale della proporzionalità come il più adeguato per le situazioni proposte.

La seconda ipotesi che sta alla base del nostro lavoro è che gli alunni di 12-13 anni siano in grado, se messi in opportune situazioni didattiche, di proporre ipotesi di modelli risolutivi, di confutare il ricorso a strategie scorrette (ad esempio il ricorso al modello additivo delle differenze costanti) e di validare invece la correttezza dell'utilizzo del ragionamento proporzionale. Si vedrà in ciò che segue come questa ipotesi sia stata ampiamente suffragata durante la realizzazione delle sperimentazioni.

La terza ipotesi, infine, riguarda la modalità didattica da adottare nelle situazioni problematiche proposte agli alunni: la discussione collettiva, coordinata adeguatamente dall'insegnante, è risultata una modalità molto efficace per uno sviluppo positivo del pensiero proporzionale.

In accordo con i principi del costruttivismo sociale si ritengono centrali, nello sviluppo educativo degli studenti, sia i processi individuali che le interazioni con gli altri, cioè sia la dimensione individuale che quella

sociale. Insegnanti e studenti dovrebbero realizzare in classe attività di ricerca in cui poter lavorare insieme, ponendo e risolvendo questioni.

Compito dell'insegnante non è più quello di preparare gli alunni alla memorizzazione e ripetizione di formule e concetti ma quello di promuovere negli alunni le qualità di un ricercatore, così da saper affrontare situazioni mutevoli e complesse, anche al di fuori dell'ambiente scolastico. Per arrivare ad un tale traguardo la discussione collettiva su opportune situazioni problematiche costituisce una modalità didattica importante: rispetto ad altre modalità infatti essa forza maggiormente gli alunni alla partecipazione, alla ricerca di giustificazioni o confutazioni, in sintesi ad un produttivo confronto cognitivo con i compagni.

Le schede sperimentate sono state pensate come schede individuali: dopo la loro compilazione seguiva però la discussione collettiva, coordinata dall'insegnante, sulle strategie risolutive emerse e questa fase, come sottolineato, era dunque fondamentale

Ciò che mi preme sottolineare, perché ha senza dubbio favorito l'analisi approfondita delle esperienze effettuate in classe, è il fatto che esse siano state sviluppate con la collaborazione di alcune laureande in matematica, che hanno trasformato le varie esperienze in oggetto di studio per la loro tesi di laurea (Valeria Valenziano [1995], Elena Castagnola [1996], Maria Cristina Torresani [1997], Monica Rusconi [2001]): questo ha consentito anche di avere a disposizione le registrazioni di tutte le discussioni effettuate, le loro trascrizioni ed ulteriori annotazioni sullo svolgimento dell'esperienza. Non sarebbe stato ovviamente possibile avere a disposizione la stessa mole di informazioni se l'insegnante fosse stata sola in classe.

2. LA PRIMA SITUAZIONE PROBLEMÁTICA

Per la formulazione della prima scheda sono state esaminate diverse situazioni allo scopo di individuare quelle che potessero favorire la costruzione di strategie risolutive e consentire la validazione o confutazione delle stesse attraverso la discussione e sulla base di un vissuto significativo per i ragazzi di 12-13 anni.

Si è quindi preferito scartare problemi collegati a similitudine e velocità, poiché richiedono la conoscenza di concetti non ancora famigliari, o relativi ad esempio al rapporto lato-perimetro di un quadrato, che, costituendo una situazione di proporzionalità elementare, non danno adito ad errore.

In questa scheda si è quindi pensato di proporre un problema sui miscugli di colore, essendo abbastanza

intuitiva l'idea di "uguale tonalità di colore" e soprattutto molto familiare ad alunni di scuola media. Anche la scelta dei dati non è casuale: si può notare, ad esempio, che il numero dei barattoli di giallo a disposizione di Piero è esattamente la metà di quelli usati per dipingere il primo pannello.

Per rendere più evidenti le relazioni numeriche tra i dati assegnati, si richiede di collocarli in una tabella prima di procedere alla soluzione del quesito.

Il testo della scheda è il seguente:

1

Si devono dipingere di verde tre pannelli di dimensioni diverse e si hanno a disposizione barattoli tutti uguali, di colore giallo e blu.

I pannelli devono avere tutti la stessa tonalità di colore. MARCO ha dipinto il primo pannello utilizzando un miscuglio ottenuto con

4 barattoli di blu e 6 barattoli di giallo

LUISA deve dipingere il secondo pannello: per ottenere la stessa tonalità di colore ed avendo a disposizione 10 barattoli di blu, di quanti barattoli di giallo ha bisogno?

PIERO, per il terzo pannello, ha 3 barattoli di giallo: di quanti barattoli di blu ha bisogno?

Prima di rispondere colloca i dati nella seguente tabella, poi rifletti e completa la tabella:

	BARATTOLI di BLU	BARATTOLI di GIALLO
MARCO		
LUISA		
PIERO		

Spiega il tuo ragionamento per completare la tabella:

*per LUISA
.....
Per PIERO
.....*

La situazione problematica proposta può dar luogo a due diversi procedimenti risolutivi: uno basato sulla differenza e l'altro sul rapporto:

1. alcuni alunni, notando la differenza tra il numero dei barattoli blu e quelli gialli di Marco, potrebbero ritenere essenziale mantenere invariata tale differenza anche nei casi di Luisa e Piero;

2. altri alunni potrebbero intuire che è basilare mantenere costante il rapporto tra i numeri. Tale rapporto può essere visto "in riga", cioè tra il numero dei barattoli di blu e quello dei barattoli di giallo, o "in colonna", ossia tra il numero dei barattoli del medesimo colore utilizzati per dipingere i pannelli.

In ogni caso i ragazzi dovrebbero essere in grado di scegliere una strategia e la scheda richiede anche che essi

spieghino verbalmente il ragionamento che li ha guidati. Tale richiesta ha lo scopo di favorire negli alunni la riflessione sui propri processi di pensiero: non è semplice ripercorrere le tappe del proprio pensiero, né è facile riprodurle verbalmente, tuttavia si tratta di un momento cognitivo fondamentale, che consente di fissare il proprio ragionamento e di poterlo quindi ricordare a se stessi o comunicare agli altri.

Nella discussione che segue il lavoro individuale sulla scheda si prevede che si esprimano le varie soluzioni dei ragazzi e soprattutto si argomentino sulle strategie risolutive proposte. Durante tale fase di discussione è possibile che alcuni mettano in dubbio o arrivino anche a modificare la propria soluzione. Per essere dunque a conoscenza della situazione cognitiva di ogni alunno, si è pensato di introdurre una nuova scheda il cui testo è il seguente:

A conclusione della discussione sulla Scheda 1:

NON HO CAMBIATO IDEA sulla mia soluzione perché
HO CAMBIATO IDEA sulla mia soluzione perché
SONO INCERTO sulla mia soluzione perché

Le risposte a questa scheda consentono di verificare se la discussione ha dato origine ad eventuali ripensamenti sulla soluzione al problema proposto e di conoscere anche le motivazioni che li hanno favoriti.

3. LE SOLUZIONI E LA DISCUSSIONE DI CLASSE

Per completare la Scheda 1 di solito la maggioranza dei ragazzi utilizza una strategia additiva: osservato cioè che la differenza tra i barattoli di giallo e quelli di blu usati da Marco è 2, impone la stessa regolarità nei casi di Luisa e di Piero, trovando così che a Luisa occorrono 12 barattoli di giallo e a Piero 1 di blu.

Accade sempre, però, che alcuni alunni ricorrano esplicitamente a strategie intuitive che preludono al ragionamento proporzionale, concludendo correttamente che a Luisa occorrono 15 barattoli di giallo e a Piero 2 di blu. I ragazzi che rispondono in modo adeguato possono ad esempio fare riferimento a rapporti 'in riga' sulla tabella proposta dalla scheda, che qui è utile riportare completa dei dati assegnati:

	<i>BARATTOLI di BLU</i>	<i>BARATTOLI di GIALLO</i>
<i>MARCO</i>	<i>4</i>	<i>6</i>
<i>LUISA</i>	<i>10</i>	
<i>PIERO</i>		<i>3</i>

È possibile cioè notare che i barattoli blu di Marco sono i $\frac{2}{3}$ di quelli gialli, o che quelli gialli sono i $\frac{3}{2}$ di quelli blu oppure che i barattoli gialli sono una volta e mezza quelli blu e imporre la stessa regolarità anche per Luisa e Piero.

Ecco esempi di protocolli relativi alle tre tipologie di motivazioni descritte.

Benedetta:

"Per Luisa Ho tenuto sempre conto che i barattoli di blu sono i $\frac{2}{3}$ di quelli gialli. Infatti Marco ha utilizzato 4 barattoli di blu e 6 di giallo e 4 è i $\frac{2}{3}$ di 6.

Per Piero lo stesso che per Luisa"

Elisa C.:

"Per Luisa Secondo me dato che Luisa ha a disposizione 10 barattoli di blu per avere una tonalità di verde uguale a quella di Marco deve per forza prendere i 10 barattoli e dividerli a metà ovvero fare 2 gruppi da 5 barattoli l'uno. Allora deve prendere tanti barattoli perché il numero dei barattoli gialli deve essere il triplo di 5. Quindi deve prendere 15 barattoli. Così otterrà la stessa tonalità di Marco.

Per Piero Piero ha 3 barattoli di giallo e dato che il numero dei barattoli gialli è il triplo della metà di quelli blu, quelli blu sono 2. Perché la metà di 2 è 1 e 3 è il triplo di 1."

Elena:

"Per Luisa Deve usare come Marco tanti barattoli di giallo quanti quelli di blu + la metà.

Per Piero Marco e Luisa hanno usato un certo numero di barattoli di blu e lo stesso numero più la metà di barattoli gialli. Quindi Piero ha 3 barattoli, 2 di blu più la metà di questi.

In tutti e tre i casi i barattoli di giallo sono l'intero più la metà dell'intero."

Alcuni alunni che rispondono correttamente possono invece ragionare 'in colonna', anche interpretando in modo differente il ricorso a tale rapporto. Ecco due esempi:

Elisa B.:

"Per Luisa I barattoli di blu di Marco sono 4 e quelli di Luisa sono 10, se riesco a capire di quanto si è 'ingrandito' il barattolo di blu di Marco per arrivare alla grandezza del barattolo blu di Luisa, posso calcolare la grandezza del barattolo giallo di Luisa. Per fare questo devo moltiplicare $4 \times n$ dove $n = 10:4 = 2,5$. $2,5 \times 6 = 15$ barattoli gialli di Luisa.

Per Piero La stessa cosa la faccio con Piero, solo che adesso parto dai barattoli gialli. $3:6 = 0,5$ $0,5 \times 4 = 2$ barattoli blu di Piero"

E' curioso, nel protocollo di Elisa B., l'uso del termine 'ingrandito', che l'alunna stessa mette tra virgolette, a sottolineare che l'ambiente in cui sta utilizzando il termine non è quello più opportuno: è evidente comunque l'adeguatezza dell'analogia e l'efficacia della sua argomentazione. Trovato nel caso di Luisa il 'fattore di ingrandimento' per i barattoli di blu, cioè 2,5, esso viene applicato anche per i barattoli di giallo; l'alunna procede poi analogamente nel caso di Piero, dopo aver trovato che in questo caso il fattore moltiplicativo (che in effetti risulta ora di 'riduzione') è 0,5.

Altri alunni che rispondono correttamente possono riferirsi sia a rapporti 'in riga' che a rapporti 'in colonna', come risulta evidente ad esempio dal seguente protocollo:

Giovanni:

"Per Luisa $BLU\ 4+4+4:2 = 10$ $GIALLO\ 6+6+6:2 = 15 \rightarrow 4/6 = 10/15$

So che tutti i numeri sono una classe di frazioni equivalenti

Per Piero $GIALLO\ 15:5 = 3$ $10:5 = 2 \rightarrow 4/6 = 10/15 = 2/3$ "

Durante la discussione a seguito del lavoro sul problema della prima scheda l'insegnante sollecita i ragazzi ad esporre le differenti strategie risolutive e favorisce il confronto e il dialogo nella classe, senza dichiarare quale sia la strada più opportuna da seguire ma lasciando che siano gli alunni stessi i protagonisti del dibattito.

Mentre durante il lavoro individuale ogni ragazzo ha dovuto rispondere alle domande della scheda e motivare le risposte date, ora, durante la discussione, occorre affrontare un compito più complesso: ascoltare le soluzioni dei compagni, accorgersi delle analogie o delle differenze con la propria soluzione e decidere di accettare o confutare soluzioni differenti dalla propria fornendo motivazioni adeguate.

In ciò che segue si presentano alcuni esempi di argomentazioni proposte dai ragazzi per confutare la strategia additiva a favore del ragionamento proporzionale. Vediamo dunque, attraverso alcuni esempi, come gli alunni siano capaci, spesso con ragionamenti originali ed efficaci, di sostenere tale nuovo e difficile compito.

In una classe il primo ad esprimere dubbi sulla strategia scorretta proposta da una compagna è Riccardo:

Riccardo: "Se hai 2 barattoli gialli come fai?"

Insegnante: "Perché? Cosa vuol dire '2 barattoli gialli'?"

Riccardo: "Lei dice che i barattoli gialli devono essere sempre 2 in più di quelli blu."

Insegnante: "Lei dice che ... vero Alessandra che è così? ... che devono essere 2 barattoli in più di quelli blu."

Riccardo: "E ma se lei ha 2 barattoli gialli come fa?"

Alessandra: "E ... non lo so"

Insegnante: "In che senso ... 2 barattoli gialli?"

Riccardo: "Mettiamo: Piero invece di usare 3 barattoli gialli ne aveva 2... come fa poi? Ti diventa 0?"

Insegnante: "Non ho capito bene cosa dice lui ... dimmelo un po' tu, Tomaso"

Tomaso: "Dice che i barattoli blu devono essere sempre 2 meno di quelli gialli, quindi se Piero al posto di avere 3 barattoli di giallo aveva 2 barattoli gialli ... cioè i barattoli blu dovrebbero essere stati 0 e quindi non viene verde"

Il ricorso a questa situazione 'limite' si verifica frequentemente nelle sperimentazioni di queste schede di lavoro e costituisce senza dubbio una riflessione significativa: può comunque accadere che questo tipo di argomentazione non abbia un seguito immediato, cioè non venga subito compresa o condivisa: si verifica, però, che ogni volta essa lascia una traccia importante, che emerge poi in interventi successivi.

Un altro tipo di motivazione che emerge spesso per contrastare la soluzione delle differenze costanti e che dà luogo a sviluppi interessanti è evidente nei passi seguenti:

Michele: "Io volevo contestare la teoria di Angelo e degli altri perché volevo dire ... Adesso mettiamo che il pannello di Marco è due volte più grande ... e quindi ci vorrebbero 12 barattoli di giallo e quelli blu diventerebbero 8 ... e la differenza aumenta"

Walter: "Se mi viene la differenza ... cioè se viene più differenza fra i barattoli di blu e i barattoli di giallo, cambia la tonalità del verde"

Insegnante: "Quindi tu ritieni che il pannello grande il doppio che aveva ipotizzato Michele avrà una tonalità diversa ..."

Walter: "Perché la differenza tra il giallo e il blu è maggiore!"

Michele: "Walter, ascolta: moltiplicando per 2, i barattoli usati sono uguali. Se veniva con 6 e 4 la stessa tonalità, aggiungi un altro 6 e 4 e la differenza è comunque 4 barattoli ma la tonalità è uguale!"

Accade spesso che le motivazioni espresse dai ragazzi non siano chiare, risulta cioè evidente che gli alunni stiano quasi 'pensando a voce alta', tentando di esprimere a se stessi e agli altri ciò che non li convince. Si tratta di momenti importanti perché i compagni possono cogliere e sviluppare l'idea emersa, come risulta dalla seguente sequenza di interventi:

Francesco: "Io ottengo un colore che è diverso se resto dell'ipotesi del 6 meno 4, dell'1 e 3 ... è sbagliato! Sono convinto che devo mantenere le proporzioni, se io moltiplico uno devo moltiplicare anche l'altro, se io facessi sempre ... se avessi fatto ... non lo so, io dico: ogni 4 barattoli di Marco ... se dico che ... ma mancano le proporzioni perché 10 non è 4!"

Insegnante: "Allora ... io non ho capito queste parole 'mancano le proporzioni': cosa significa?"

Francesco: "Cioè nel senso che se io devo moltiplicare un numero, devo moltiplicare anche l'altro"

Insegnante: "Ma perché è necessario moltiplicarlo e non fare la differenza come fanno loro?"

Francesco: "Se io trovo la differenza, trovo la differenza fra 4 e 6 ma non fra 10 e un altro numero, la trovo fra 4 e 6. Se invece io calcolo che 4 è i $\frac{2}{3}$ di 6, poi posso calcolare i $\frac{3}{2}$ di 10 e i $\frac{2}{3}$ di 3"

Andrea: "Per esempio se io devo diminuire due numeri diversi, cioè allora, se devo mantenere la proporzionalità non posso togliere lo stesso numero di barattoli, che è 2, da un numero che è minore, diverso dai primi perché il rapporto che c'è tra 6 e 4 è diverso da quello che c'è tra 10 e il numero 12, cioè non posso togliere il numero che in proporzione $\frac{6}{4}$ dà la stessa tonalità ad un numero che è maggiore ... non si può ottenere la stessa tonalità ..."

Edoardo: "La differenza fra 4 e 6 è 2, ma 2 ha diverso valore sui numeri, per esempio su un milione 2 non ha lo stesso valore che su 4, ad esempio 50 lire su 100 lire è tanto, su un milione non è niente!"

Elisa: "Se io sono povera e mi danno 2000 lire è tantissimo per me, se sono ricca e mi danno 2000 lire non me ne importa niente: 2 rispetto ai numeri ha un valore diverso!"

Dagli esempi illustrati emerge chiaramente la ricchezza delle argomentazioni dei ragazzi, sollecitata dalla tensione cognitiva creata dalla novità del problema affrontato: si tratta indubbiamente di situazioni didattiche molto fruttuose, come evidenziano i risultati che di solito si ottengono. A conclusione della fase di discussione, infatti, gli alunni compilano la scheda descritta nell'itinerario, nella quale sono invitati a dichiarare se a seguito del dibattito hanno cambiato idea oppure sono incerti sulla loro iniziale strategia risolutiva, motivando l'eventuale cambiamento.

In riferimento alle esperienze svolte accade sempre che un buon numero di alunni che avevano scelto la strategia additiva dichiarino di aver cambiato idea, optando per la strategia dei rapporti costanti oppure si dichiarino incerti: nel complesso risulta dunque che gli alunni recepiscano in modo significativo le argomentazioni emerse

in classe, condividendole o comunque prendendole in considerazione.

Di solito non tutti gli studenti, a fine discussione, sono d'accordo con la necessità del ricorso ai rapporti, tuttavia l'insegnante non si pronuncia in merito alla correttezza delle varie strategie. Con le schede successive la classe può dunque affrontare nuovamente la stessa problematica in un contesto diverso.

4. LA SECONDA SITUAZIONE PROBLEMATICAMENTE: ULTERIORI ARGOMENTAZIONI

L'itinerario didattico prosegue con la proposta, ai ragazzi, delle schede 2, 3, 4, una alla volta. La prima introduce gli alunni in un nuovo contesto problematico, le partite a tennis, e, dati il numero delle partite giocate e vinte da ognuno di 4 giocatori, si chiede chi sia il più bravo.

Il testo della scheda è il seguente.

2

Alberto, Bruno, Carlo e Dario sono giocatori di tennis della stessa categoria. Durante l'anno scolastico hanno partecipato a diversi tornei ottenendo i seguenti risultati:

	Alberto	Bruno	Carlo	Dario
Partite vinte	15	20	28	48
Partite giocate	30	90	52	100

*In base agli esiti ottenuti secondo te chi è il più bravo?
Spiega come sei arrivato alla tua conclusione. Se ti sembra utile puoi anche utilizzare tabelle, schemi, segmenti,.....*

Si tratta ancora di una scheda esplorativa, per rispondere alla quale non è fondamentale l'uso del rapporto; infatti, volutamente, i dati numerici proposti danno la possibilità di adottare più strategie risolutive: in particolare Carlo, poiché è l'unico che vince più di quanto perde (28 è più della metà di 52), è senza dubbio il più bravo.

Attraverso le risposte dei ragazzi, si può comunque constatare se qualcuno ricorra spontaneamente ad un confronto di rapporti, eventualmente anche a seguito della discussione effettuata.

La maggioranza della classe, nella scheda 2, risponde di solito adeguatamente, affermando che Carlo è il migliore fra i giocatori proposti.

Le motivazioni che gli alunni presentano sui loro protocolli sono spesso di tipologie differenti: un buon numero di alunni si accorge sempre che Carlo è l'unico giocatore a vincere più della metà delle partite che gioca e dunque è il più bravo.

E' frequente anche il confronto tra partite vinte e perse di ciascun giocatore, che interpreta in un altro modo, peraltro equivalente al precedente, la situazione proposta. Un esempio è il seguente.

Alice Man.:

" $30 - 15 = 15$ (perse) Alberto $90 - 20 = 70$ (perse) Bruno
 $52 - 28 = 24$ (perse) Carlo $100 - 48 = 52$ (perse) Dario

Il più bravo è Carlo perché è l'unico che fra tutte le partite che ha fatto ne ha vinte di più di quelle che ha perso, cioè il numero di partite vinte sono maggiori di quelle perse."

Alcuni alunni presentano motivazioni che si riferiscono a rapporti, oltre che al confronto delle partite vinte con la metà delle partite giocate, come evidenziano i due protocolli che seguono, nei quali si nota come il ragionamento proporzionale sia già ad un buon livello di sviluppo.

Edoardo:

"Secondo me il più bravo è Carlo perché ne ha vinte più di metà.

Sono arrivato alla conclusione facendo così:

$15/30 = 0,5$ Alberto $20/90 = 0,222$ Bruno
 $28/52 = 0,538$ Carlo $48/100 = 0,48$ Dario

Ho fatto così perché praticamente le partite sono delle frazioni, per esempio Carlo ne ha vinte 28 su 52 quindi $28/52 = 0,538$."

Nella scheda successiva, dati il numero di partite vinte e giocate di un solo atleta, si chiede di calcolare il dato mancante di altri sportivi perché possano essere ritenuti tutti "ugualmente bravi".

Il testo della scheda è il seguente:

3

Nella seguente tabella ci sono gli esiti delle partite a tennis giocate da alcuni giocatori della stessa categoria.

*Completa la tabella in modo che i giocatori si possano considerare **ugualmente bravi** (in base agli esiti della tabella):*

	Claudio	Enzo	Anna	Marco	Elena
N° partite vinte	20	10	50
N° partite giocate	70	105

Spiega come hai fatto a trovare i numeri per completare la tabella.

Per **Enzo**
 Per **Anna**
 Per **Marco**
 Per **Elena**

Per trovare i dati mancanti, i ragazzi potrebbero notare ad esempio che le partite vinte da Enzo sono proprio la metà di quelle vinte da Claudio e quindi ripetere l'operazione per le partite giocate oppure che le partite giocate da Anna sono una volta e mezza quelle giocate da Claudio e quindi mantenere la stessa regolarità per le partite vinte.

Ci si aspetta in ogni modo che alcuni alunni sottraggano il numero di partite vinte da quello delle partite giocate e mantengano tale differenza nei casi successivi, ritenendo capaci allo stesso modo due giocatori con un numero pari di sconfitte.

L'ultima scheda riguardante questa situazione è stata studiata appositamente per far riflettere tutta la classe sull'uso scorretto del criterio della costanza della differenza come metodo per giudicare ugualmente bravi i giocatori.

I ragazzi, dopo aver completato una tabella con il numero di partite vinte e giocate da otto atleti mantenendo in ogni caso costante il numero delle sconfitte, devono stabilire se li possono ritenere tutti ugualmente bravi.

Il testo della scheda è il seguente:

4

*Completa ora la seguente tabella in modo che per ogni giocatore la **differenza** tra il numero delle partite giocate e quello delle partite vinte sia 30.*

	Ada	Aldo	Bice	Enzo	Anna	Ivo	Gino	Emma
N° partite vinte	2	30	10
N° partite giocate	32	64	100

*In base ai dati della tabella completata sei disposto a considerare tutti i giocatori "**ugualmente bravi**" ?
 Giustifica la tua risposta.*

Anche in questa circostanza la scelta dei dati non è casuale: si può notare che Bice ha uno stesso numero di vittorie e di sconfitte, mentre Enzo gioca il doppio delle partite giocate da Ada e questo potrebbe favorire le argomentazioni per confutare la strategia proposta.

Per tre giocatori non è fornito alcun dato: alcuni ragazzi potrebbero orientare le loro scelte verso casi particolari significativi, in cui ad esempio si utilizzino numeri abbastanza alti e per i quali sia dunque evidente il "diverso peso" delle 30 partite perse.

Con questa scheda si è deciso di dedicare uno specifico momento didattico alla discussione della strategia scorretta del ricorso alle differenze costanti perché, anche in base ad esperienze precedenti, si è ritenuto cognitivamente efficace promuovere la riflessione di tutta la classe (anche di chi non ha sbagliato nella scheda 3) su una strategia basata su un modello matematico così semplice e "naturale" come quello additivo: si vuole in questo modo forzare i ragazzi a rendersi conto delle motivazioni in base alle quali il modello additivo non è adeguato alla situazione problematica proposta.

La maggioranza degli alunni risponde di solito che i giocatori non sono ugualmente bravi, solo una minoranza dichiara invece che i giocatori hanno uguale bravura. Le motivazioni di chi risponde correttamente sono, come al solito, piuttosto varie e presentano livelli differenti di consapevolezza

Ecco due passaggi particolarmente significativi che si riferiscono in particolare alla discussione relativa alla scheda 4:

.....

Niccolò M. : *Per me non sono tutti bravi ugualmente, perché non appartengono tutti alla stessa classe di equivalenza, perché se divido numeratore e denominatore ottengo risultati completamente diversi .*

Insegnante: *Luisa, vedo che fai una faccia un po' così.*

Luisa: *Io avevo detto di sì perché è lo stesso ragionamento della terza scheda: le partite vinte sono sempre 30 in meno di quelle giocate.*

Insegnante: *Alessio, tu cosa dici?*

Alessio: *Io dico che come è possibile che due giocatori siano bravi uguali quando uno ne gioca 70 e ne vince 20 e un altro ne gioca 100 e ne vince 50? E se uno ne gioca 50 e ne vince 0?*

Marco V.: *Se un giocatore ne gioca 30 e ne vince 0 e uno ne gioca 2000 e ne vince 1970, lui ne ha vinte 1970, però 30 ne ha sempre perse.*

Insegnante: *Quindi per te è ugualmente bravo, giusto?*

Marco V.: *Sì.*

Giovanni: *Per me ha ragione Marco. E' come per i colori, la differenza è sempre quella: giocare 30 e vincerne 0 è come giocare 31 e vincerne 1.*

Alessio: *Questi sono i barattoli che giocano a tennis. E' lo stesso discorso. Si possono giocare anche miliardi di partite, l'importante è che si mantenga il rapporto.*

Pamela: *Per me, è sbagliato quello che dice Marco perché se un giocatore ha giocato 32 partite e ne ha vinte 2, la differenza è 30 allora sono più le partite perse che quelle vinte; mentre se un giocatore ne ha giocate 80 e ne ha perse 30 vuol dire che quelle vinte sono 50 e sono di più quelle vinte di quelle perse.*

Nel ragionamento di Pamela c'è l'ipotesi che se uno vince più partite di quelle che perde è più bravo di un altro che perde più partite di quelle che vince.

...

Alessio: *Io vorrei fare uno dei miei soliti esempi. Supponiamo di avere un pezzo di pane. Dividiamolo in 30 parti; seguendo il suo ragionamento, la differenza deve essere 30, non te ne do niente. Prendo un altro pezzo di pane, lo divido in 70 parti e te ne do 40. Secondo te, hai mangiato uguale?*

Giovanni: *No. Però dipende dagli esempi perché nei colori era giustissimo*

Insegnante: *noi non abbiamo detto che era giusto, non abbiamo detto niente.*

Giovanni: *Per me era giusto; la quantità sarà stata diversa, però il colore era lo stesso.*

Insegnante: *Paolo.*

Paolo: *Io vorrei dire una cosa a Giovanni. Tu sostieni che, per avere la stessa tonalità, i gialli devono essere sempre 2 in più dei blu. Ma se i barattoli gialli sono 2, i blu devono essere 2 in meno, quindi sono 0. Non si può ottenere la stessa tonalità; infatti viene giallo. Perciò non può essere sempre la differenza uguale.*

Osserviamo, negli interventi di Alessio, Pamela e Paolo, la notevole efficacia degli esempi numerici scelti (in particolare del ricorso allo 0) e delle analogie proposte. In una verifica individuale proposta in questa classe dopo le prime quattro schede ma prima di una trattazione sistematica della proporzionalità e senza aver lavorato su altre situazioni problematiche, si è potuto constatare l'incisività delle argomentazioni dei ragazzi emerse durante le discussioni in classe.

Ad esempio, di fronte al quesito:

"Per preparare un'aranciata mescoli 6 parti di succo concentrato d'aranciata ed 8 parti di acqua. Luisa per avere la stessa concentrazione mescola 12 parti di acqua con 10 di succo. E' giusto il procedimento di Luisa? Giustifica."

La totalità della classe concorda sulla scorrettezza del procedimento di Luisa e 5 alunni ripropongono esplicitamente argomentazioni con il ricorso allo zero, come ad esempio nel seguente protocollo di Marco:

"No, il procedimento di Luisa è sbagliato perchè avere 10 parti di succo e 12 parti di acqua è diverso che avere 8 parti di acqua e 6 parti di succo.

Non può essere uguale perchè se Luisa prendesse 0 parti di succo e 2 di acqua non sarebbe uguale, anche pur essendovi la differenza di 2."

Anche se la spiegazione di Marco non è del tutto esplicita, costituisce comunque una prova di quanto abbiano inciso gli esempi "con lo zero" emersi proprio dai ragazzi.

5. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Oltre alle due situazioni problematiche presentate, l'itinerario didattico prevedeva un'ulteriore situazione, nell'ambito della probabilità (la valutazione della probabilità di un evento non era però stata oggetto di riflessione e studio per la classe), prima della fase conclusiva del progetto, cioè del riconoscimento, da parte dell'insegnante, della adeguatezza delle strategie proporzionali emerse e discusse.

Senza aggiungere altri dettagli, vogliamo qui esporre, in sintesi, ciò che ha caratterizzato le due situazioni problematiche descritte nei paragrafi precedenti e che, anche secondo il giudizio degli insegnanti, è stato determinante per il coinvolgimento cognitivo di tutta la classe (si tratta delle condizioni che caratterizzano una situazione-problema, esposte nel Capitolo 5):

- le conoscenze iniziali degli alunni della classe erano state giudicate sufficienti affinché essi potessero procedere da soli, cioè pensare di utilizzare una strategia che facesse riferimento, anche inconsapevolmente, a un ragionamento proporzionale o a un altro tipo di "regolarità" che comunque erano in grado di accettare o confutare;
- gli allievi potevano decidere da soli se una soluzione era corretta oppure no: fondamentale, in questo caso, è stata la discussione che l'insegnante ha saputo sollecitare nella classe a partire dalle strategie proposte dagli alunni stessi, a conclusione del lavoro individuale;
- dovevano essere costruite nuove conoscenze: nel nostro caso infatti, come già osservato, l'obiettivo era quello di costruire il ragionamento proporzionale;
- la conoscenza che si desiderava venisse acquisita dall'allievo doveva essere lo strumento più adatto alla soluzione dei problemi proposti: in entrambi i casi le strategie additive si rivelavano inadeguate e lo strumento matematico più opportuno risultava il ricorso a rapporti costanti.

E' evidente, infine, il collegamento alla teoria dell'*Inquiry* descritta nel Capitolo 6, centrata sull'uso positivo degli errori nell'educazione matematica.

La discussione di classe, come si è visto, si è sviluppata proprio intorno alla strategia scorretta, quella delle "differenze costanti", emersa dalla maggioranza degli alunni. La Scheda 4, in particolare, propone la riflessione su questa strategia a tutta la classe, forzandone così la confutazione in base alle argomentazioni sollecitate dalla scheda e che infatti, come si è visto, sono emerse nella discussione.