Soluzione dei Punti 3 e 4 del Problema 2 della simulazione della seconda prova di Matematica e Fisica del 02/04/2019 – Liceo Scientifico

A cura del Gruppo Formatori Casio

Problema 2

.

.

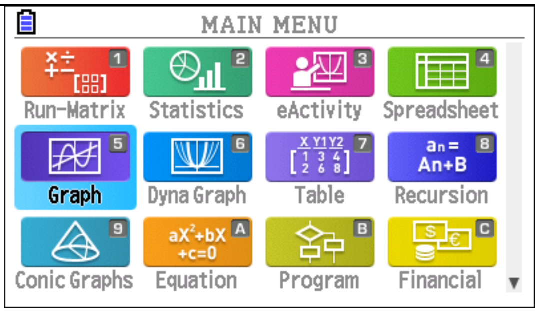
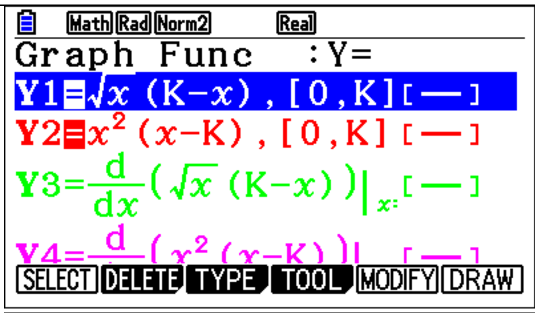
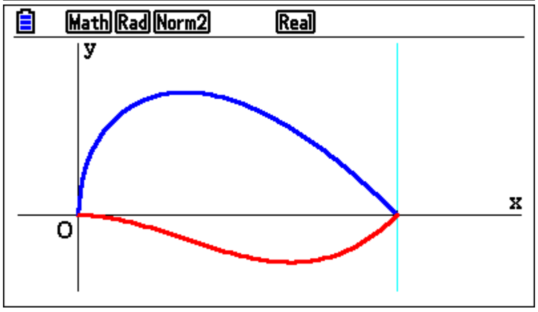
Punto 3

D'ora in avanti, assumeremo $k = 1$. In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, per $x \in [0, 1]$, rappresenta il profilo di una spira metallica. Sia S la regione piana delimitata da tale spira.

3. *Supponendo che nella regione S sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di S, avente intensità $B_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\, T$, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso S è pari a $7{,}0 \cdot 10^{-3}\, Wb$.*

Anzitutto osserviamo che, per $k = 1$, $f(x) = \sqrt{x}\,(1 - x)$ $\;e\;$ $g(x) = x^2(x - 1)$.

Disegniamone i grafici con l'aiuto della calcolatrice:

<u>Passo #1</u> Dal `MAIN MENU`, seleziona la modalità **Graph** (5). (**<u>ricordati di aver lasciato impostato in Dyna Graph il valore di k=1.</u>**)	
<u>Passo #2</u> Rappresenta le due funzioni con F6 (DRAW). La regione S va visualizzata meglio, per questo controlla le dimensioni del grafico con ⊞(ingrandire), ⊟(rimpicciolire) e ◀ ▶ ▲ ▼ per centrare il grafico.	

Per calcolare il flusso del campo magnetico, indichiamo con $\vec{S}$ un vettore di modulo pari all'area della regione S, che sia a essa ortogonale, cioè parallelo al campo. Per definizione di flusso, si ha:

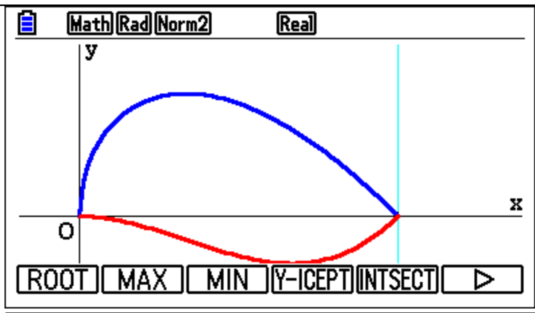
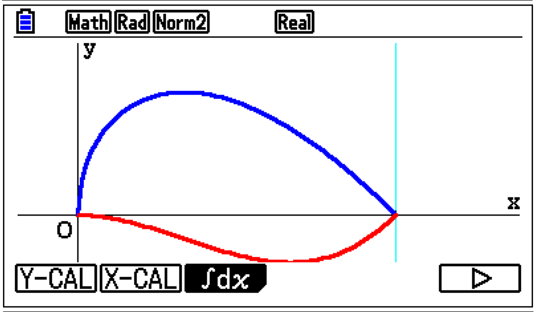
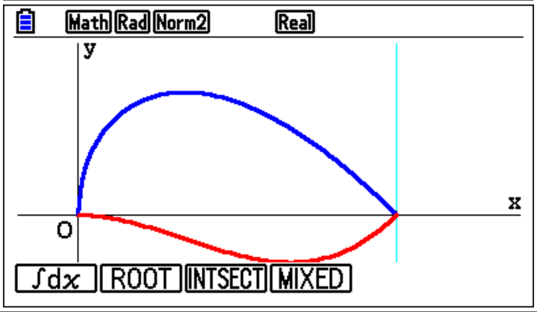
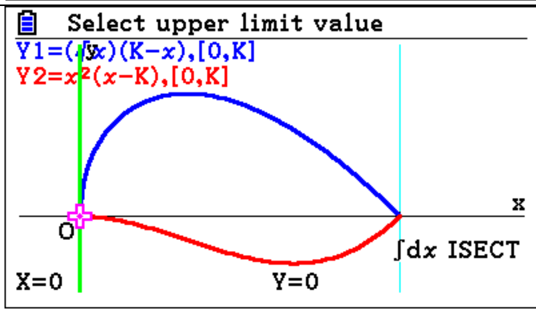
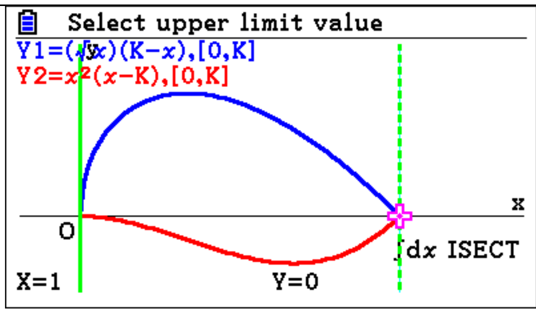
$$\Phi_S = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 \cdot S \cdot \cos 0 = B_0 \cdot S$$

Per ottenere il flusso, devo calcolare l'area di S:

$$S = \int_0^1 \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x}\,(1-x) - x^2(x-1) \right) dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}} - x^3 + x^2 \right) dx =$$

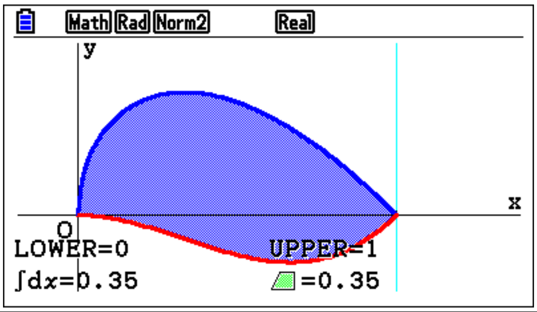
$$= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{40-24-15+20}{60} = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}$$

Posso calcolare l’area S con la calcolatrice, partendo direttamente dalla schermata precedente:

Passo #3 Ora calcola l’area della regione S. Restando in questa schermata, digita [F5] per attivare i comandi del menu (G-Solv) (scritta gialla sopra il tasto [F5]). Digita [F6] per fare scorrere il menù	
e poi [F3] per scegliere il comando Integrale definito	
premi ancora [F3] (INTSECT) per l’area della superficie racchiusa dai grafici delle funzioni.	
La calcolatrice suggerisce come estremo inferiore $x = 0$, ascissa del primo punto di intersezione, digito [EXE] per confermare.	
Cliccando sul cursore, ▶, la calcolatrice si porta sul secondo estremo, cioè il secondo punto di intersezione tra i due grafici,	

digita EXE per confermare.

A questo punto la calcolatrice evidenzia la regione S e calcola la sua area.



Quindi $S = 0{,}35\ m^2$ e si ha

$$\Phi_S = B_0 \cdot S = (2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T}) \cdot (0{,}35\ m^2) = 7{,}0 \cdot 10^{-3} Wb \quad \blacksquare$$

Punto 4

4. *Supporre che la spira abbia resistenza elettrica R pari a $70\ \Omega$ e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di S, a partire dall'istante $t_0 = 0$ s, inizi a variare secondo la legge:*

$$B(t) = B_0\, e^{-\omega t} \cos(\omega t),\ \ con\ \ \omega = \pi\ \ rad/s$$

e $t \geq 0$ espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di t, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso.
Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta.

La Legge di Faraday–Neumann-Lenz afferma che la forza elettromotrice indotta, f_{em}, è

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Pertanto, si ha:

$$i(t) = \frac{f_{em}}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Per ottenere l'espressione analitica della corrente indotta, devo calcolare il flusso del campo magnetico e poi la sua derivata rispetto al tempo. Per i calcoli svolti in precedenza e ricordando che il campo magnetico è perpendicolare alla superficie, si ha:

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = S \cdot B_0\, e^{-\pi t} \cos(\pi t) = 7{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot\ e^{-\pi t} \cos(\pi t)\ Wb$$

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = 7{,}0 \cdot 10^{-3} [-\pi e^{-\pi t} \cos(\pi t)\ -\ e^{-\pi t} \pi \sin(\pi t)]\ V =$$

$$= -7{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot \pi e^{-\pi t} \cdot [\cos(\pi t)\ + \sin(\pi t)]\ V$$

Da cui si ha:

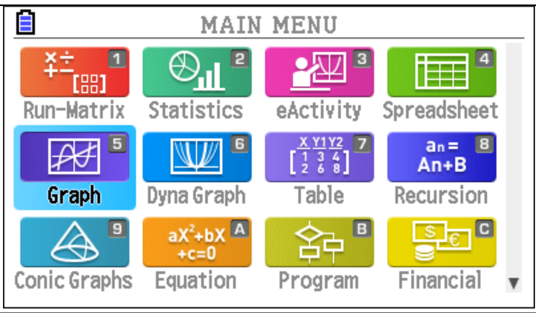
$$i(t) = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{1}{70\Omega} \cdot (-7{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot \pi e^{-\pi t} \cdot [\cos(\pi t)\ + \sin(\pi t)]\ V) =$$

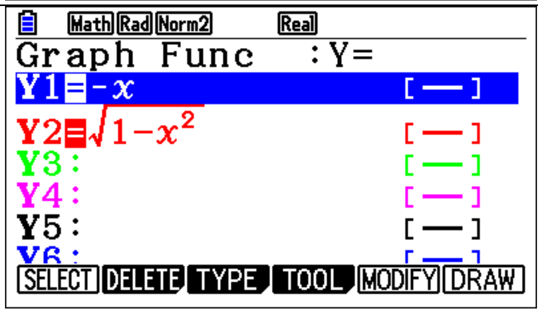
$$= \pi e^{-\pi t} \cdot 10^{-4} \cdot [\cos(\pi t)\ + \sin(\pi t)]\ A$$

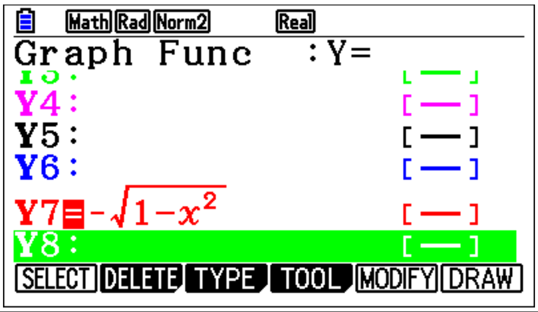
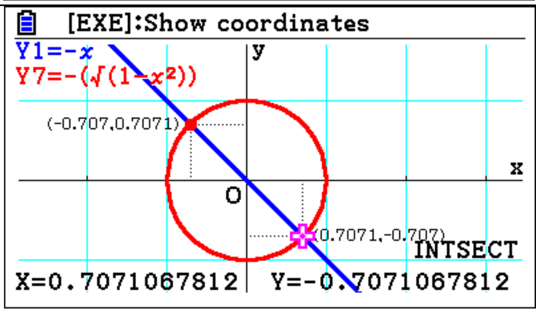
Per determinare in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso, a partire dall'istante $t_0 = 0$ s, devo considerare solo la funzione goniometrica tra parentesi quadre, in quanto gli altri fattori sono positivi:

$$\cos(\pi t)\ + \sin(\pi t) \leq 0$$

Uso il Metodo grafico, rappresentando in un riferimento cartesiano la circonferenza goniometrica e la retta $y = -x$, ponendo $\cos(\pi t) = x$ e $\sin(\pi t) = y$. Rappresento la situazione nella modalità Graph della calcolatrice grafica CASIO FX-CG50:

<table>
<tr><td><u>Passo #1</u>
Dal MAIN MENU, seleziona la modalità Graph (5).</td><td>
</td></tr>
<tr><td><u>Passo #2</u>
Usando il cursore, inserisci le funzioni seguenti:
$y = -x, \quad y = \sqrt{1-x^2}, \quad y = -\sqrt{1-x^2}.$

(Uso la slot Y7 perché ha lo stesso colore di Y2)</td><td>


</td></tr>
<tr><td><u>Passo #3</u>
Digita F6 per disegnare i grafici.
Per trovare le intersezioni tra la retta e la circonferenza goniometrica agisci con F5 (G-Solv) e poi F5 (INTSECT).
Per imprimere le coordinate dei punti premi per ognuna EXE</td><td>
</td></tr>
</table>

Osservando che si tratta della bisettrice del II e IV quadrante, la retta $y = -x$ interseca la circonferenza nei punti $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, che corrispondono, rispettivamente, agli angoli $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ e $\beta = \frac{7}{4}\pi$, i punti che soddisfano la mia condizione appartengono all'arco di circonferenza sottostante la retta, pertanto si ha:

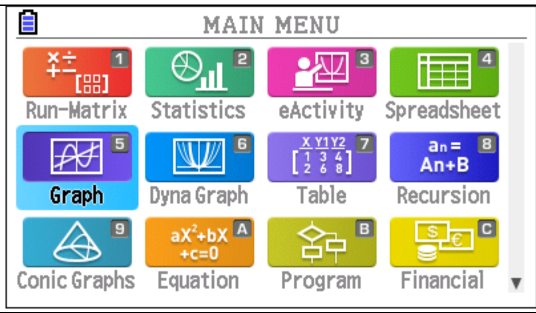
$$\cos(\pi t) + \sin(\pi t) \leq 0 \rightarrow \frac{3}{4}\pi + k\pi \leq \pi t \leq \frac{7}{4}\pi + k\pi \rightarrow \frac{3}{4} + k \leq t \leq \frac{7}{4} + k, \qquad k \epsilon Z$$

Quindi la corrente parte, per $t > 0$, si annulla la prima volta per $t = 0{,}75\ s$, $(k = 0)$ e la corrente cambia verso.

Posso anche usare la calcolatrice grafica per risolvere "graficamente" la disequazione:

Passo #1

Dal `MAIN MENU`, seleziona la modalità **Graph** (5).



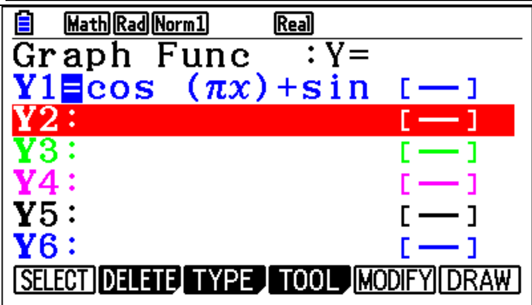
Passo #2

Inserisci la funzione goniometrica

$$y = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$$

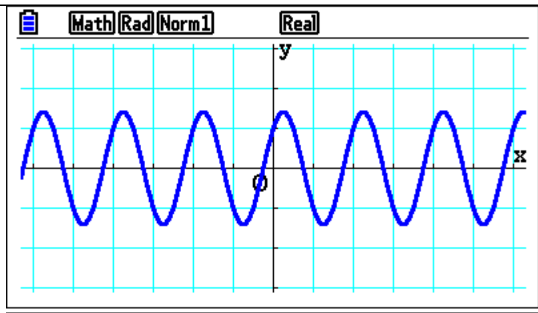
[cos] [(] [SHIFT] [$\times10^x$] [X,θ,T] [)] [+]

[sin] [(] [SHIFT] [$\times10^x$] [X,θ,T] [)] [EXE]

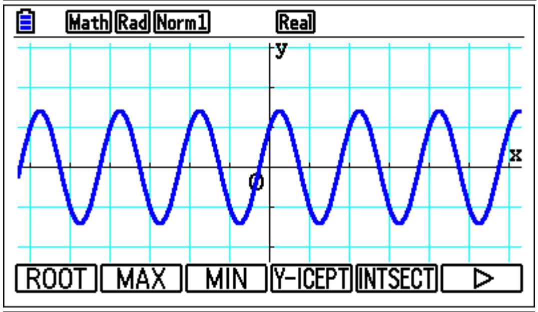


Passo #3

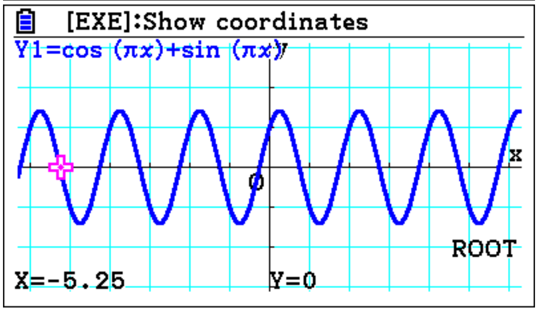
Digita [F6] per disegnare il grafico



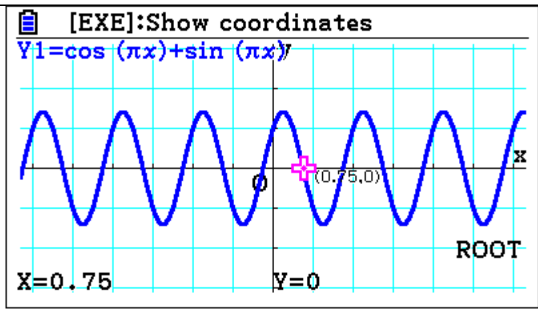
Premi [F5] per attivare i comandi della funzione G-Solv



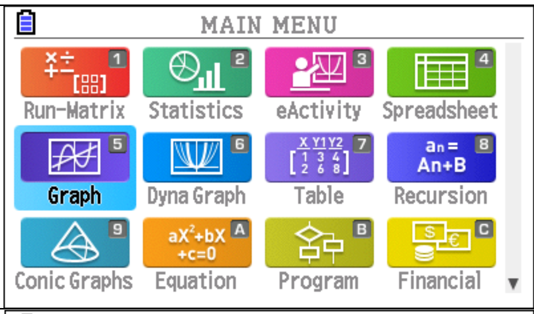
Digita [F1] (ROOT) per la ricerca degli zeri della funzione

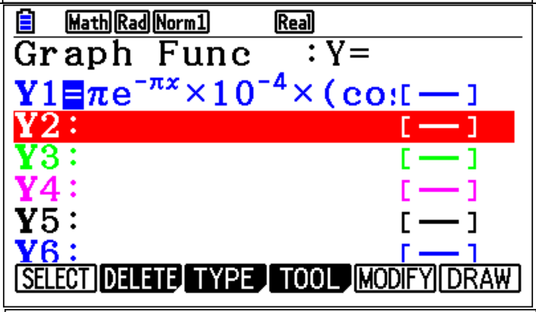


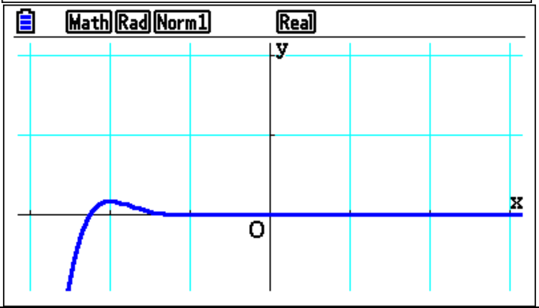
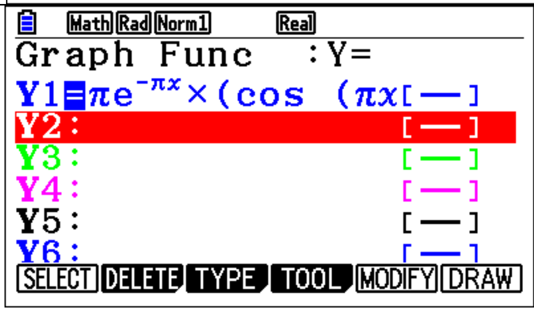
Usando il cursore [▶] sposta la "croce **fucsia**" verso destra per determinare il primo punto di intersezione con l'asse delle *x*, avente ascissa positiva: 0,75, per cui la corrente cambia verso la prima volta per $t = 0{,}75\ s$

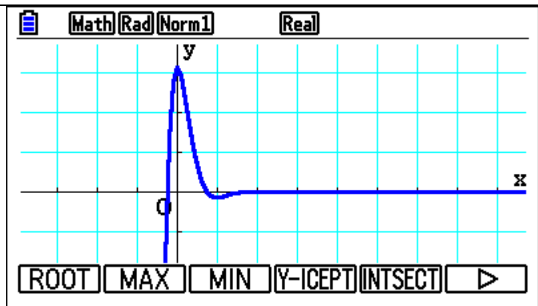


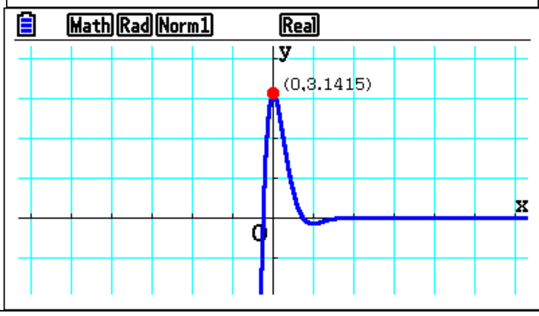
Per visualizzare l'andamento della corrente per $t \geq 0$ e determinare il suo valore massimo possiamo usare la calcolatrice grafica.

<table>
<tr>
<td><u>Passo #1</u>
Dal <code>MAIN MENU</code>, seleziona la modalità Graph (5).</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Passo #2</u>
Inserisci la funzione "Intensità di corrente"
$$i(t) = \pi e^{-\pi t} \cdot 10^{-4} \cdot [\cos(\pi t) + \sin(\pi t)]$$
digitando
[SHIFT] [x10^x] [SHIFT] [ln] [(−)] [SHIFT] [x10^x] [X,θ,T] [▶] [×]
[1] [0] [^] [(−)] [4] [▶] [×] [(] [cos] [(] [SHIFT] [x10^x]
[X,θ,T] [)] [+] [sin] [(] [SHIFT] [x10^x] [X,θ,T] [)] [)] [EXE]

Prova a disegnare il grafico digitando [F6], ma ti accorgi che il grafico è troppo schiacciato sull'asse delle x per valutarne l'andamento.</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Passo #3</u>
Devi quindi "capire" che il fattore 10^{-4} non influisce sull'andamento, ma impedisce di "vedere" massimi e minimi della funzione, per cui va "eliminato", come fattore di scala, usando la funzione
$$y = \pi e^{-\pi t} \cdot [\cos(\pi t) + \sin(\pi t)]$$
[SHIFT] [x10^x] [SHIFT] [ln] [(−)] [SHIFT] [x10^x] [X,θ,T] [▶] [×]
[(] [cos] [(] [SHIFT] [x10^x] [X,θ,T] [)]
[+] [sin] [(] [SHIFT] [x10^x] [X,θ,T] [)] [)] [EXE]</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Digita [F6] per visualizzare il grafico, stavolta appare evidente che per $t \geq 0$ presenta un massimo assoluto in zero.

Il massimo della corrente a meno del fattore 10^{-4} si può individuare premendo [F5] (G-Solv) e poi [F2] (MAX).</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Il valore massimo della corrente per $t \geq 0$ si determina studiando gli zeri e il segno della derivata prima:

$$\frac{d\,i(t)}{dt} = \pi \cdot 10^{-4} \cdot \{-\pi e^{-\pi t} \cdot [\cos(\pi t)\ + \sin(\pi t)] + e^{-\pi t} \cdot [-\pi \sin(\pi t) + \pi \cos(\pi t)\ ]\} \frac{A}{s} =$$

$$= \pi^2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\pi t} \cdot [-\cos(\pi t)\ - \sin(\pi t) - \sin(\pi t) + \cos(\pi t)\ ] \frac{A}{s} =$$

$$= -2\pi^2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\pi t} \cdot \sin(\pi t)\ \frac{A}{s}$$

Osservando che $-2\pi^2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\pi t} < 0\ , \forall t \geq 0$, il segno della derivata dipende solo da $\sin(\pi t)$ e si ha:

$$\sin(\pi t) = 0\ per\ t = 0\ \ e\ \ \sin(\pi t) > 0\ \ per\ t \in (0; 1)$$

Pertanto, la funzione $i(t)$ è decrescente $per\ t \in (0; 1)$ e ha un massimo in $t = 0$, in cui assume il valore

$$i(0) = \pi e^0 \cdot 10^{-4} \cdot [\cos(0)\ + \sin(0)]\ A = \pi \cdot 10^{-4}\ A$$

Questo valore risulta il massimo assoluto per $t \geq 0$: infatti la funzione, per la periodicità del seno, presenta infiniti massimi relativi, in cui però assume i valori:

$$i(t) = \pi e^{-\pi t} \cdot 10^{-4}\ A < \pi \cdot 10^{-4}\ A$$

La relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta è definita dalla legge di Lenz, secondo la quale *il verso della corrente indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera*.

In altri termini,

- se la variazione del campo magnetico è positiva, si ha una corrente indotta negativa;
- se la variazione del campo magnetico è negativa, si ha una corrente indotta positiva.